Муниципальное бюджетное образовательное учреждение лицей г. Лобня

**МЕТОДИЧЕСАЯ РАБОТА.**

**«Обучение математическим доказательствам на уроках геометрии».**

Кузуб Юлия Валерьевна

г. Лобня

2019г.

**Под обучением доказательству** будем понимать обучение учащихся анализу готовых доказательств, их воспроизведению, самостоятельному открытию факта, поиску и конструированию доказательства, а так же опровержению предложенных доказательств.

*Проблемы* обучению доказательств по мнению психологов (ПП.Блонский, С.Л. Рубинштейн, М.Г. Ярошевский и др.) следующие:

1. Структура мозга, руководящие аналитической деятельностью, формируются к 13-14 годам
2. Развитие доказательного мышления проходит две стадии. В подростковом возрасте школьник скорее усваивает доказательства, чем самостоятельно пользуется ими, и еще меньше он создает их. В юношеском возрасте уже заметно выступает критическое отношение к готовым доказательствам и стремление к собственным доказательствам.
3. Доказательство – специфическая деятельность, овладение которой требует специального, целенаправленного формирования ее составляющих действий.

Наиболее важные результаты исследований логических аспектов доказательств:

1. Обучение дедукции, включающее разъяснение простейших схем дедуктивных рассуждений неявно применяемых в доказательствах, является необходимым условием успешного применения дедукции как метода обучения , метода получения новых знаний (А.А. Столяр)
2. Процесс доказательства- сложный процесс мышления и он формируется лишь постепенно от простых к более сложным структурам. Этому должны соответствовать и постепенное усложнение структуры доказательства и постепенное повышение его уровня строгости.
3. Деятельность по доказательству включает в себя следующие действия:

* Подведение объекта под понятие; выбор системы признаков, необходимых и достаточных для подведения под понятие, соответствующих конкретным условиям теоремы или задачам на доказательство; развертывание условия – выведение системы следствий; выделение в условии « поисковых областей»;
* Вычленение из формулировки теорем их объектов, условия, заключения; запись теоремы в краткой символической форме, построение для этой теоремы ей обратной; перевод формулировки теоремы на язык необходимых и достаточных условий;
* Построение умозаключений таким образом, чтобы вывод любого из умозаключений использовался бы в качестве посылки в одном или нескольких последующих;
* Выделение условия и заключение утверждения, заданного в словесно-символической форме; пользование правилами отделения, импликации, дедукции, противоречия, контра-позиции; распознавание понятия с помощью подведения под теорему –признак; отыскание следствий с помощью выведения следствий из определения или с помощью подведения под теорему свойство; расчленение теоремы с заключением вида «В1 и В2» на две подтеоремы с заключениями «В1» и «В2»

Выделяют следующие причины *трудностей,* возникающих у учащихся при доказательствах:

* Плохое качество знаний;
* Неумение их применять;
* Неосознанность умственных операций;
* Неумение устанавливать связь между логическими шагами и т.д

**Доказательства в курсе геометрии основной школы**

Прежде чем говорить о доказательстве, дадим характеристику основных форм мышления. Введем некоторые необходимые понятия.

***Умозаключением*** называется процесс получения нового суждения-вывода из одного или нескольких данных суждений.

***Силлогизм*** – это умозаключение, в котором на основании двух суждений (большей посылки и меньшей посылки) выводится третье суждение (вывод, заключение).

Большая посылка – это некоторое общее суждение (аксиома, теорема, определение, допущение и т. д.); меньшая посылка – частное суждение.

***Пример****. Если три стороны одного треугольника равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны (общее суждение).*

В треугольниках АВС и А1В1С1АВ = А1В1, АС = А1С1, ВС = В1С1(частное суждение).

Треугольник АВС равен треугольнику А1В1С1 (новое суждение-вывод).

Теперь мы в состоянии принять рабочее понятие доказательства, достаточное для нужд школьного курса планиметрии.

***Доказательство*** – логическое действие, в процессе которого истинность какого-либо математического предложения обосновывается с помощью других предложений, признанных истинными ранее. Это действие обычно представляет собой цепочку силлогизмов.

Доказательство включает в себя три основных элемента:

***Тезис***, установить истинность которого – главная цель доказательства. Форма выражения тезиса – суждение.

***Аргументы*** (основания) доказательства – положения, на которые опирается доказательство и из которых при условии их истинности необходимо следует истинность доказываемого тезиса. Форма выражения аргументов – суждения. Связывая аргументы, приходим к умозаключениям, которые строятся по определенным правилам.

***Демонстрация*** – логический процесс взаимосвязи суждений, в результате которого осуществляется переход от аргументов к тезису.

К тезису, аргументам и демонстрации предъявляют определенные требования, нарушение которых приводит к ошибкам в доказательствах.

*Требования* к доказываемому предложению (*тезису*):

– тезис должен быть сформулирован ясно и определенно. Пример небрежной формулировки тезиса: большей дуге соответствует большая хорда (это справедливо для дуг одной и той же или равных окружностей и при условии, что большая дуга меньше полуокружности);

– тезис должен оставаться неизменным на протяжении всего доказательства.

*Требования к аргументам:*

– аргументы доказательства должны быть суждениями истинными и доказанными.

– аргументы должны быть такими суждениями, истинность которых доказана независимо от тезиса.

К типичным случаям нарушения первого требования относят:

а) использование в качестве аргумента доказательства такого положения, которое само нуждается в доказательстве;

б) использование в качестве аргумента доказательства ложного суждения;

в) использование в качестве основания суждения, с помощью которого можно доказать не только данный тезис, но и заведомо ложные утверждения.

*В демонстрации*, т.е. в переходе от аргументов к тезису, также возможны ошибки, обусловленные нарушением правила вывода, используемых в этом переходе. Различают ошибки двух видов:

– тезис не вытекает из аргументов, а произвольно присоединяется к ним;

– тезис выведен из аргументов путем ошибочного умозаключения.

Очевидно, что число таких ошибок уменьшилось, если бы правила вывода были предметом изучения в школе.

**Методы доказательства теорем.**

По способу связи аргументов от условия к заключению доказательства подразделяются на *прямые* и *косвенные*.

*Прямое доказательство* основано на каком-нибудь несомненном начале, из которого непосредственно устанавливается истинность теоремы.

Методы прямого доказательства:

– синтетический,

– аналитический,

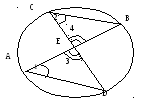
– метод математической индукции.

*Синтетический метод*: при построении цепочки силлогизмов мысль движется от условия теоремы к ее заключению.

В учебниках приводятся преимущественно синтетические доказательства. Их преимущества – полнота, сжатость, краткость. Недостатки – отсутствие мотивации шагов, обоснования дополнительных построений; они носят значительно более формальный характер, чем аналитические доказательства.

**Пример**. Теорема о хордах окружности.

Теорема. Если две хорды окружности пересекаются, то произведения отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.

Дано: АВ и СД – хорды окружности, Е – точка их пересечения.

Доказать: АЕ⋅ВЕ = СЕ⋅ДЕ. (1)

***Доказательство (синтетическое)***

Рассмотрим треугольники АДЕ и СВЕ. В этих треугольниках углы 1 и 2 равны, так как они вписанные и опираются на одну и ту же дугу ВМД, а углы 3 и 4 равны как вертикальные. По первому признаку подобия треугольников ΔАДЕ ~ ΔСВЕ. Отсюда следует, чтоhttps://studfiles.net/html/2706/500/html_k3f5uXsUXA.Ty3a/img-YkrCtM.pnghttps://studfiles.net/html/2706/500/html_k3f5uXsUXA.Ty3a/img-0aQ8jx.png, или АЕ⋅ВЕ = СЕ⋅ДЕ. Теорема доказана .

*Аналитический метод*: при поиске доказательства мысль движется от заключения теоремы к ее условию. Преимущества этого метода – есть отправное звено доказательства, дополнительные построения мотивированы, увеличивается творческая активность учащихся. Недостатки – большие потери времени, искусственные дополнительные построения трудно обосновать.

**Пример**. Теорема о хордах окружности.

***Доказательство (аналитическое)***

Чтобы доказать равенство (1), достаточно показать, чтоhttps://studfiles.net/html/2706/500/html_k3f5uXsUXA.Ty3a/img-hOZda0.png(2).

Для того, чтобы найти пропорцию (2), достаточно доказать подобие треугольников, стороны которых являются членами этой пропорции. Для получения таких треугольников соединяем точки С и В, А и Д.

Чтобы обосновать верность пропорции (2), достаточно доказать, что ΔАДЕ ~ ΔСВЕ. Эти треугольники подобны по первому признаку подобия треугольников: ∠1 = ∠2 как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу ВМД, а ∠3 = ∠4 как вертикальные. Следовательно, теорема верна .

Любое аналитическое доказательство обратимо в синтетическое и наоборот. Это широко используется в учебном процессе. Технологии могут быть таковы:

1) синтетическое доказательство предваряется аналитическими поисками его плана;

2) синтетическое доказательство заменяется аналитическим, в качестве домашнего задания – изучение синтетического доказательства по учебнику;

3) при использовании лекционного метода (преимущественно за пределами курса основной школы) часто используется чисто синтетический метод доказательства.

*Метод математической индукции* не имеет распространения в геометрии, так как основан на свойствах множества натуральных чисел, выходит за рамки основной школы, поэтому мы не будет подвергать его специальному изучению.

*Косвенное доказательство*: истинность теоремы устанавливается посредством опровержения некоторых суждений, содержащихся в теореме.

Наиболее распространенный и единственно применимый в курсе планиметрии метод косвенного доказательства – *доказательство от противного*.

Логико-математическая сущность метода от противного: вместо прямой (р ⇒ q) доказывается обратная противоположной теорема (https://studfiles.net/html/2706/500/html_k3f5uXsUXA.Ty3a/img-eT7MeU.png).

**Поэтому доказательство методом от противного строится по следующей схеме:**

1) пусть неверно q, то есть истинно https://studfiles.net/html/2706/500/html_k3f5uXsUXA.Ty3a/img-oPKWgk.png;

2) докажем, что ложно р, то есть истинно https://studfiles.net/html/2706/500/html_k3f5uXsUXA.Ty3a/img-Rli3oC.png;

3) убедились, что из https://studfiles.net/html/2706/500/html_k3f5uXsUXA.Ty3a/img-u79aX7.png;

4) следовательно, р ⇒ q (в силу равносильности импликаций р ⇒ q и https://studfiles.net/html/2706/500/html_k3f5uXsUXA.Ty3a/img-fH4nj5.png), что и требовалось доказать.

Курс геометрии основной школы широко применяет доказательства от противного, начиная буквально с первых уроков в седьмом классе. При этом необходимо использовать алгоритмический подход.

***Алгоритм доказательства от противного*.**

1. Допускаем, что заключение теоремы ложно. Тогда будет верно противоречащее ему утверждение.

2. Вычленяем возможные случаи.

3. Убеждаемся, что в каждом случае приходим к следствию, которое противоречит:

– условию теоремы,

– ранее установленным математическим фактам.

4. Наличие противоречия заставляет отказаться от принятого заключения.

5. Признаем справедливость заключения доказываемой теоремы.

Мы охарактеризовали основные *логические методы* доказательства теорем: прямые и косвенные, которые в свою очередь могут быть аналитическими и синтетическими, доказательствами от противного.

Можно говорить об основных ***математических методах*** доказательства теорем. В геометрии к ним можно отнести следующие базовые методы:

1) *метод геометрических преобразований*: эффективен, соответствует современной концепции обучения геометрии в школе, но требует развитого абстрактного и пространственного мышления; методика его использования в школе недостаточно отработана;

2) *метод равенства и подобия треугольников –* соответствует классической концепции обучения геометрии в школе, известен со времен Евклида, поэтому методика его хорошо разработана; навыки его применения формируются постепенно, в процессе решения задач и доказательства теорем.

Кроме указанных базовых математических методов доказательства теорем планиметрии можно говорить о более частных методах: метод симметрии, метод поворота, векторный метод, алгебраический метод, метод подобия, координатный метод и др.

## Методика обучения доказательству теорем

В начале изучения геометрии в основной школе происходит переход к строгим логическим обоснованиям математических предложений. Этот переход всегда вызывал и вызывает значительные трудности: учащиеся не только не усваивают идеи доказательства, плохо отыскивают последовательность шагов, но и не видят надобности в самом логическом доказательстве, особенно если доказываемый факт наглядный.

Причины этого явления кроются в том, что до седьмого класса мы ограничиваемся индуктивными обоснованиями. Поэтому для учащихся достаточно чертежа, из которого и так все ясно. Одной из проблем школьных учебников по геометрии является то, что в них совершенно не показано, как думало человечество, создавая ту или иную теорию, более того, там нет попыток показать, как думал математик, создавая то ил иное доказательство, и уже практически совсем нет попыток учить ученика рассуждать и доказывать.

Иерархия уровней обучения доказательству в средней школе представлена в следующей схеме:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Обучение доказательству | |
|  |  |
| 5-6класс | Формирование потребности в логических обоснованиях | Формирование умения выполнять дедуктивные выводы |
|  | |  |
| 6-7 класс | Обучение эвристическим приемам и их применению | Обучение выполнению цепочки логических шагов |
|  | |  |
| 7 класс | Обучение самостоятельному разбору готового доказательства | Формирование умения выделять идею доказательства |
|  | |  |
| 7-8 класс | Обучение использованию методов научного познания | Самостоятельное доказательство |
|  | |  |
| 9 класс и далее | Обучение умению опровергать предложенные доказательства | |

**Методика изучения конкретной теоремы**

Работа учителя над теоремой многоэтапна. Выделим основные из этих этапов:

1)актуализация знаний, мотивация изучения теоремы; 2)формулировка теоремы и усвоение ее содержания;

3) доказательство теоремы;

4) закрепление и применение теоремы

Заметим, что в каждом конкретном случае учитель сам решает, какие этапы с какой полнотой использовать, а без каких можно обойтись. Это зависит от особенностей класса, предыдущего опыта учителя, сложности теоремы для восприятия и др.

***1-ый этап – актуализация знаний*(опорное повторение)*и мотивация изучения теоремы.***

Технология организации опорного повторения: учитель

– разбивает доказательство на максимальное число шагов;

– вычленяет все математические факты, на которые опирается доказательство;

– анализирует, все ли они и в какой степени известны учащимся;

– организует опорное повторение в форме беседы, фронтального опроса, системы подготовительных задач (чаще всего “на готовых чертежах”).

Мотивация изучения теоремы чаще всего связывается учителем с решением практической задачи, в которой необходим факт, отраженный в теореме.

***2-й этап – введение формулировки теоремы и усвоение ее содержания*.**

Опишем два основных **способа введения формулировки** теоремы.

**1-й способ.** Учитель сам формулирует теорему с предварительной мотивировкой либо без нее.

Спешить с формулировкой не следует. Только в том случае, если она проста, доходчива, можно начинать с формулировки. Если формулировка не отличается простотой, то учитель прежде всего вычерчивает фигуру, выясняет и записывает на доске условие, заключение теоремы и только после этого формулирует ее полностью.

Преимущества способа – краткость, четкость, экономия времени; недостаток – возможен формализм, догматизм.

**2-й способ.** Учащиеся подготавливаются к самостоятельному формулированию теоремы.

В планиметрии для этого часто используют упражнения на построение и измерение соответствующих фигур.

**Пример**. Для самостоятельного открытия учащимися теоремы о хордах окружности учитель предлагает следующие вопросы и задания:

– Проведите в окружности две неравные хорды.

– Установите на глаз, какая из них ближе к центру.

– Сформулируйте свой вывод.

– Можно ли считать его достоверным?

Преимущества способа – развитие творческих способностей учеников, повышение интереса к изучению геометрии; недостатки – большие затраты времени, возможное распыление внимание на несущественные детали.

После того, как теорема сформулирована, работаем над уточнением: оговариваем терминологию, выделяем условие и заключение теоремы. Параллельно выполняется краткая запись данных и того, что требуется доказать; строится чертеж.

Требования к чертежу:

– должен быть изображен общий, а не частный случай;

– размеры чертежа должны быть оптимальны;

– данные и искомые выделяются на чертеже цветом, используются специальные метки и символы для обозначения.

***3-й этап – доказательство теоремы*.**

Учебник во много определяет выбор метода доказательства: логического (прямое или косвенное, аналитическое, синтетическое или метод от противного) и математического (метод геометрических преобразований или метод равенства или подобия треугольников).

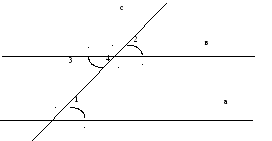
Учитель должен хорошо разбираться в структуре всех видов доказательства, уметь перевести синтетическое доказательство в *аналитическое и наоборот*; осознанно выбрать аналитический или синтетический путь рассуждений на уроке (в зависимости от возраста и уровня подготовки учащихся, профиля класса, возможных затрат времени и др.).

Учащиеся должны понимать, что процесс доказательства заключается в построении последовательной цепочки рассуждений, обоснованных с помощью уже известных математических фактов. Заключение – последнее ее звено.

Как мы знаем, каждый шаг этой цепочки – силлогизм. В школе нет возможности, да и необходимости вводить термины “силлогизм”, “большая посылка”, “меньшая посылка”. Обычно в обучении геометрии в основной школе пользуются терминами “шаг”, “этап”: на каждом шаге доказательства указывается утверждение и его обоснование.

На первых порах для понимания структуры доказательства, после того, как оно найдено, полезно оформление его в виде двух колонок, в одной из которых – утверждения, в другой – обоснования.

**Пример**. Признак параллельности прямых.

**Теорема:** Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.

|  |  |
| --- | --- |
| ***Утверждение*** | ***Обоснование*** |
| 1. ∠3 = ∠2 | Вертикальные углы равны |
| 2. ∠1 = ∠2 | По условию |
| 3. ∠1 = ∠3 | Как левые части верных равенств, у которых равны правые части |
| 4. а ⎢⎢в | ∠1 и ∠3 – накрест лежащие углы при пересечении прямых **а** и **в** секущей **с**. |

Наибольшая трудность – усвоение логики доказательства. Большую помощь тут могут оказать специальные карточки, которые могут применяться в качестве самостоятельной работы, домашнего задания, задания для индивидуального опроса и др.

Техника их изготовления проста: опуская некоторые пункты в колонках “утверждение”, “обоснование”, получаем один из вариантов индивидуальной карточки, который может быть использован как лист с печатной основой (ученик вписывает недостающие фрагменты доказательства).

Методика использования карточек: выдается карточка, предлагается заполнить пустые места; разным группам учащихся предлагаются карточки с различной насыщенностью текста, осуществляя таким образом индивидуализацию обучения математике.

Для ***подготовки учащихся к изучению доказательства*** теоремы многие учителя пользуются *приемом составления плана доказательства*. Обычно выделяется два этапа.

**1 подход**. Дается *готовый план* доказательства новой теоремы, учащимся предлагается самим доказать ее с помощью плана.

**Пример.** К теореме «Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то он является параллелограммом» предлагается такой план:

1. Провести диагональ

2. Доказать равенство полученных треугольников

3. Доказать параллельность противоположных сторон четырехугольника

4. Сделать вывод. ⁬

План демонстрируется классу, например, на экране с помощью интерактивной доски, мультимедиапроектора или кодоскопа

**2-й подход**. Учащихся учат *составлять план уже доказанной теоремы.* Сначала эта работа выполняется коллективно, а затем самостоятельно. Причем, здесь учителю приходится неоднократно показывать образцы составления плана. Учащиеся свободно воспринимают готовый план, но не сразу у них появляются умения и навыки составления плана. Очень хорошие результаты получаются в тех случаях, когда для доказательства нескольких теорем дается один общий план. Такие теоремы, объединенные общей идеей, усваиваются особенно продуктивно.

В учебниках планиметрии представлены краткие синтетические доказательства теорем. Учитель должен систематически учить учащихся:

1) конструировать доказательства из шагов;

2) превращать сокращенные книжные доказательства в развернутые цепочки шагов с указанием обоснований;

3) оформлять полные записи доказательства отдельных теорем.

*Приведем пример полной записи доказательства теоремы по шагам.*

**Пример**. Полное доказательство признака параллельности прямых

Пусть при пересечении прямых **а** и **в** секущей **с** имеем углы, например, ∠2 и ∠3 – вертикальные, ∠1 и ∠3 – накрест лежащие.

1. Так как ∠3 и ∠2 – вертикальные углы, то ∠3 = ∠2 (вертикальные углы равны).

2. Так как ∠1 = ∠2 и ∠3 = ∠2, то ∠1 = ∠3 (если правые части в верных равенствах равны, то равны их левые части).

3. Так как ∠1 и ∠3 – накрест лежащие углы при пересечении прямых **а** и **в** секущей **с** и ∠1 = ∠3, то **а** ⎢⎢**в** (если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны).

ЧТД.

В процессе доказательства необходимо полностью использовать условие теоремы. Один из путей – обсуждение, на каких этапах и как применена та или другая часть условия, все ли они использованы при доказательстве.

Для обеспечения усвоения доказательства широко применяется *прием двукратного доказательства*: сначала обсуждается только идея, план; доказательство излагается фрагментарно. После этого доказательство

*4-й этап – закрепление и применение теоремы*

Этап закрепления теоремы предполагает работу по выявлению, поняты ли сущность самой теоремы, идея, метод доказательства и отдельные его шаги. Приемы закрепления могут быть таковы:

– в процессе беседы с учащимися еще раз выделить основную идею, метод и шаги доказательства;

– предложить объяснить отдельные шаги доказательства;

– перечислить все аксиомы, теоремы и определения, которые используются в доказательстве;

– выяснить, где используется то или иное условие, все ли они оказались использованными;

– нет ли других способов доказательства;

– при закреплении полезно варьировать обозначения на чертеже, а также сам чертеж и т.п.

Применение теоремы организуется в процессе решения задач, в которых она используется. Нужно иметь в виду, что не всегда учебник предлагает систему задач на применение конкретной теоремы, чаще даются отдельные задачи, которые опытный учитель может дополнять. Применяются теоремы и при доказательстве других теорем последующего курса планиметрии и стереометрии.

# Организационные приемы работы по изучению и закреплению теоремы на уроке геометрии. Приемы организации работы по изучению теорем.

При изучении теорем используются разные приемы организации работы. Самый распространенный из них: изучение теоремы и ее доказательство проводит сам учитель. Значительно полезнее делать это самим ученикам. Рассмотрим приемы работы подобного характера.

Сущность *первого из приемов*. Вызывается учащийся, он записывает на доске условие теоремы полностью, оформляет рисунок, чертеж и т.д. И этот же учащийся находится у доски на протяжении всего процесса доказательства теоремы. Он и высказывает идею доказательства, записывает и обосновывает его. Этот прием имеет ряд недостатков.

– в классе возникает ситуация, когда остальные учащиеся пассивны и вынуждены списывать с доски;

– ход урока ставится в зависимость от вызванного к доске учащегося. Если он доказывает теорему уверенно, все идет гладко. В противном случае затягивается время, учитель нервничает, в классе возникает шум и т.д.;

– поскольку ход урока во многом зависит от вызванного к доске учащегося, внимание учителя в основном приковано к этому ученику. Учитель меньше работает с классом.

Для устранения перечисленных недостатков целесообразно использовать *второй прием* организации работы по доказательству теорем.

Работа учащихся над теоремой разбивается на отдельные этапы.

а) усвоение условия,

б) обдумывание идеи доказательства,

в) коллективное обсуждение идей,

г) оформление теоремы.

Эти задания у доски выполняют поочередно несколько учащихся. Охарактеризуем работу ученика на каждом из этапов

а) Усвоение условия теоремы. Один из учащихся кратко записывает на доске условие, анализирует его. Затем вызванный учащийся садится на место.

б) Классу дается задание: наметить и продумать идею доказательства теоремы.

Выдерживается пауза достаточной длительности от 1-2 минуты и более. Во время паузы учащимся рекомендуется делать наброски доказательства на черновике, разрешается советоваться с товарищем по парте.

в) Классу предлагается обсудить идею доказательства теоремы. Иногда рассматривают несколько способов, выбирают из них наиболее рациональный. Учитель постепенно приучает высказывать идею доказательства в виде краткого плана без подробных обоснований. В конце дискуссии учитель объявляет оценки тем учащимся, которые объяснили идею доказательства теоремы перед всем классом.

г) Классу предлагается оформить доказательство. Можно использовать следующие варианты:

– одному из учащихся предлагается записать доказательство на доске. За это ему также ставится оценка. Остальные учащиеся записывают в тетрадях. После обсуждения большинство учащихся представляют себе весь ход и им незачем списывать с доски;

– предлагается устно изложить доказательство теоремы с подробными объяснениями. За это еще одному учащемуся ставится оценка;

* доказательство теоремы предлагается записать самостоятельно;
* иногда учитель заранее планирует для теоремы выполнить только три первые задания. А записать доказательство предлагается либо во время самостоятельной работы в конце урока, либо дома.

Итак, прием деления на отдельные задания имеет целый ряд преимуществ, в частности, он в большей мере соответствует дидактическому принципу последовательного преодоления трудностей.

Нельзя обойти вопрос о некоторых модификациях одного и того же доказательства. Они особенно эффективны для индивидуальной работы со слабым учеником. Модификация доказательства часто сводится к использованию разных чертежей.

Разнообразные чертежи, иллюстрирующие доказательства, не привязывают ученика к одному чертежу, не дают ему возможности зазубривать доказательство.

***Приемы организации работы при закреплении теорем***

При закреплении теорем, как и при их введении, учителю приходится учитывать два обстоятельства: необходимо сформировать у учащихся навыки применения теоремы, учащиеся должны понять и запомнить ее доказательство.

*Первый прием*. Сразу после объяснения новой темы одному или нескольким учащимся предлагается повторить ее, остальным – слушать. Обычно вызываются учащиеся по желанию, а, следовательно, в основном хорошо успевающие. Такой прием приводит к следующим результатам:

– вызванные учащиеся, как правило, почти дословно воспроизводят объяснение учителя, опуская лишь те детали, которые не успели запомнить. Имеет место однообразие, повторение, что неэффектно;

– большинство учащихся слушают пассивно;

– однообразная, пассивная работа снижает интерес учащихся к уроку и ослабляет их внимание;

В психологии установлено, что забывание наиболее интенсивно протекает сразу после изучения материала, а потом оно замедляется. По этой закономерности те учащиеся, которые слушают внимательно, повторяют материал тут же на уроке, забывают его медленнее.

Этот прием приносит гораздо большую пользу, когда изученное доказательство теоремы на этом же уроке повторяют по измененному чертежу, с другими буквенными обозначениями. Такое повторение не является столь однообразным, оно требует от учащихся более активной мыслительной деятельности.

*Второй прием*. Чтобы повторить узловые части только что рассмотренной теоремы, учитель задает классу несколько вопросов. Этот прием требует меньшей затраты учебного времени, спросить удается не одного, а нескольких учащихся, класс принимает более активное участие в повторении.

*Третий прием*. Перед объяснением новой теоремы учитель предлагает послушать доказательство и одновременно составить план. Затем это задание повторяется. Прием очень эффективен, но только в тех классах, где предварительно проведена кропотливая работа по оформлению умений составлять план.

*Четвертый прием*. Доказательство рассмотренной теоремы не повторяется на данном уроке. Класс сразу преступает к решению задач по новой теме. Она закрепляется на задачах. А за 3 – 5 минут до звонка учитель подводит итог урока. Он предлагает не просто воспроизвести, пересказать изученное на уроке, а задает вопросы, которые заставляют учащихся выделить из нового материала главное, сопоставить с прежними знаниями, сравнить, обобщить и т. д. И все это связывается с только что решенными задачами по новой теме.

При такой форме подведения итога урока новый материал хорошо запоминается, так как он повторяется сразу после момента наиболее интенсивного забывания, а мыслительная деятельность учащихся разнообразна и активна.

Рассмотрим некоторые ***приемы повторения изученных теорем при проверке домашнего задания*** (на последующих уроках).

*Первый прием.* К доске вызывается учащийся. Ему дается время для подготовки к ответу. Он выполняет чертеж, записывает кратко условие и заключение теоремы, необходимые преобразования, продумывает ответ. Класс в это время занят другой работой. Затем вызванный учащийся отвечает, остальные слушают.

*Второй прием*. К доске для подготовки к ответу вызываются одновременно несколько учащихся. Класс в это время выполняет другую работу. Затем вызванные учащиеся поочередно отвечают, остальные слушают. Второй прием в отличие от первого позволяет несколько экономить учебное время. Поэтому этот прием называют *уплотненным опросом*.

*Третий прием.*К началу урока дежурные по классу записывают на доске основные преобразования из доказательств теорем, чертежи ко всем теоремам и задачам, заданным на дом. Учитель дает задание: доказать теорему или обосновать записанное на доске преобразование, или изложить решение задачи. Выдерживается пауза. Все замолкают, готовятся к ответу. Желательно чтобы учебники были открыты. Затем к доске вызываются учащийся. Его слушают гораздо внимательней, чем при уплотненном опросе, т. к. к ответу готовился весь класс. Каждый учащийся легче и быстрее улавливает неточности в ответе вызванного товарища и готов высказать необходимые дополнения, замечания, поправки.

Если ученик отвечает плохо, учитель вызывает на помощь любого другого, поскольку время на подготовку к ответу давалось всему классу. Вызванный ученик должен соблюдать общую схему ответа: формирует теорему, указывает, что дано и что требуется доказать, а затем излагает доказательство. Затем таким же образом проверяются теоремы, задачи. Такой опрос проходит обычно более четко, чем уплотненный опрос, при большей активности учащихся и меньшей затрате учебного времени.

# Пример работы над теоремой о средней линии трапеции.

*Логико-математический анализ* теоремы: «средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме».

Теорема сформулирована в категорической форме.

Сформулируем ее в условной форме, выделив явно разъяснительную часть: в любой трапеции, если есть ее средняя линия, то она параллельна основаниям и равна их полусумме.

*Итак, структура теоремы такова:*

**Разъяснительная часть** – в любой трапеции;

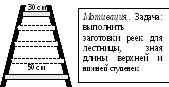
**Условие** – отрезок есть средняя линия трапеции;

**Заключение** – 1) отрезок параллелен основаниям; 2) отрезок равен полусумме оснований.

Теорема содержит два заключения, значит она сложная по структуре (но не обязательно сложным является ее доказательство).

*Этапы обучения доказательству теоремы (в основе проблемное обучение, метод эксперимента).*

1-й этап. *Мотивация* необходимости изучения данной теоремы: решение небольшой практической задачи, проблемная ситуация.

2-й этап***.*** *Актуализация* опорных знаний (расчленить теорему на ряд элементарных шагов и выявить опорные знания, необходимые для понимания доказательства). Формы организации: кратковременная самостоятельная работа, решение обобщающей задачи.

Проанализировав доказательство теоремы, следует выделить опорные знания и повторить их на этапе актуализации. В данном случае уместно повторить свойство средней линии треугольника и решить следующую задачу.

Дано: ΔABO и ΔDCO, АВ||CD, BO=CO.

Доказать: ΔABO=ΔDCO.

https://studfiles.net/html/2706/500/html_k3f5uXsUXA.Ty3a/img-BeWXWG.png3-й этап.*Введение теоремы*

Возможно дедуктивное введение теоремы и синтетический способ ее доказательства.

Однако активизации познавательной деятельности учащихся будет способствовать метод эксперимента. Свойства средней линии трапеции можно «открыть» параллельно с процессом построения средней линии в произвольных трапециях. Учащимся предлагается:

Сравнить визуально взаимное расположение средней линии и оснований трапеции;

Построить отрезок, длина которого равна сумме длин оснований трапеции. Сколько раз средняя линия укладывается на этом отрезке?

На основе выполнения задания выдвигается гипотеза о том, что средняя линия параллельна основаниям трапеции и равна ее половине.

Далее формулируется теорема, делается чертеж, записывается, что дано и требуется доказать.

Дhttps://studfiles.net/html/2706/500/html_k3f5uXsUXA.Ty3a/img-kWMAe8.pngано:ABCD – трапеция, AD и ВС – основания, QP – средняя линия.

Доказать:

1. QP||AD, QP||BC,
2. QP=1/2(AD+BC).

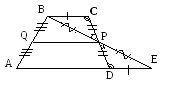
4-й этап. *Анализ. Поиск путей доказательства:*

Дайте определение трапеции. Какие прямые в нашем случае параллельны, как они называются? Требуется доказать, что средняя линия параллельна двум основаниям, то есть двум параллельным прямым. Как упростить путь доказательства этого факта? Достаточно доказать параллельность одному из оснований.

Чем можно воспользоваться? Для какой фигуры, кроме трапеции определено понятие средней линии? Нельзя ли использовать теорему о средней линии треугольника для доказательства? Можно ли отыскать или провести дополнительные построения, чтобы получить треугольник, средняя линия которого совпадает со средней линией трапеции?

5-й этап. *Синтез****.*** Составление плана доказательства.

6-й этап*. Осуществление доказательства*. Запись.

Доказательство:

1. Дополнительное построение: проведем луч ВР до пересечения с лучом AD. Е – точка пересечения.

2. Рассмотрим ΔBCP и ΔEDP:

СР=DP (P – середина CD),

∠BPC=∠EPD (как вертикальные углы),

∠BCP=∠EDP (как накрест лежащие углы при параллельных BC и AD и секущей CD),

ΔBCP=ΔEDP (по второму признаку).

Значит BC=DE, BP=PE (из равенства треугольников).

3. ΔABE:

Q – середина AB, P – середина CD,

QP – средняя линия ΔABE:

QP||AE, QP=1/2AE=1/2(AD+DE)=1/2(AD+BC) (по свойству средней линии и по построению).

4. BC||AD, QP||AD, значит QP||BC (по теореме о параллельности двух прямых третьей).

7-й этап*. Усвоение содержания теоремы и ее доказательства*:

Повторить формулировку теоремы и основные этапы ее доказательства или предложить учащимся прочитать соответствующий материал в учебнике.

Можно также применить и другой порядок работы:

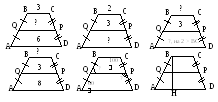
Наметить план доказательства;

Провести доказательство устно;

Провести повторное доказательство с краткой записью.

8-й этап. *Первичное закрепление теоремы.* Уместны устные задачи по готовым чертежам. Например, такие:

# Доказать, что ВН – высота трапеции

****9-й этап.*Применение теоремы*

Проанализировать систему упражнений учебника на применение свойств средней линии трапеции. Подобрать ключевые задачи по теме для решения их на специальном уроке.

**Используемая литература:**

1. Саранцев Г.И. Обучение математическим доказательствами опровержениям в школе. –М.: ВЛАДОС, 2006

# Полякова Т.С. Математические предложения и их доказательства в курсе геометрии основной школы. -Ростов-на-дону,2008